



REPUBLIKA E SHQIPËRISË
 MINISTRIA E ARSIMIT DHE SHKENCËS
 AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

PROVIMI I MATURËS SHTETËRORE 2011

I DETYRUAR

VARIANTI A

E mërkurë, 15 qershor 2011

Ora 10.00

Lënda: Matematikë
Gjimnazi – drejtimi natyror

Udhëzime për nxënësin

Testi në total ka **25 pyetje**.

Trembëdhjetë pyetjet e para janë me zgjedhje, ku do të rrethoni vetëm shkronjën përbri përgjigjes së saktë.

Pyetjet e tjera kanë kërkesa që janë me **zgjidhje** dhe **arsyetim**. Pranë secilës pyetje ka hapësirë për të kryer veprimet e nevojshme.

Koha për zhvillimin e testit është **2 orë e 30 minuta**.

Pikët për secilën kërkesë janë dhënë përbri saj.

Për përdorim nga komisioni i vlerësimit

Kërkesa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pikët										
Kërkesa	11	12	13	14	15a	15b	16	17	18	19
Pikët										
Kërkesa	20a	20b	21a	21b	22	23a	23b	24	25	
Pikët										

Totali i pikëve

KOMISIONI I VLERËSIMIT

1.....Anëtar

2.....Anëtar

Për pyetjet 1 - 13 rrethoni vetëm shkronjën që i përgjigjet alternativës së saktë.

1. Jepen bashkësitë $A = \{-1; 0; 1; 5\}$ dhe $B = [-1; 2]$. Gjeni numrin e elementeve të $A \cap B$. **1 pikë**

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4

2. Vlera e $\sqrt[3]{-8} =$ **1 pikë**

- A) - 8
- B) - 2
- C) 3
- D) 2

3. Në progresionin gjeometrik jepen $y_3 = 8$ dhe $y_2 = 2$. Gjeni y_1 . **1 pikë**

- A) 4
- B) 2
- C) 1
- D) $\frac{1}{2}$

4. $\log_3 6 - \log_3 2 =$ **1 pikë**

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 6

5. Vlera më e madhe e funksionit $y = 1 - \cos 4x$ është: **1 pikë**

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4

6. Vektorët $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ dhe $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ x \end{pmatrix}$ janë pingulë. Gjeni x . **1 pikë**

- A) 6
- B) 4
- C) -4
- D) -6

7. Nëse $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, atëherë $\sin^2 \alpha$ është:

1 pikë

- A) 1
 B) $\frac{3}{4}$
 C) $\frac{1}{2}$
 D) $\frac{1}{4}$

8. Jepet ekuacioni $2x^2 - 3x - 4 = 0$. Prodhimi i rrënjëve të tij është:

1 pikë

- A) -4
 B) -2
 C) 2
 D) 4

9. Jepet funksioni $y = x^5 - 4x^2 + 1$. Grafiku i tij e pret boshtin oy në pikën me ordinatë:

1 pikë

- A) 5
 B) 4
 C) 2
 D) 1

10. Diagonalet e një drejtkëndëshi priten në një pikë që e ka largesën nga brinjët përkatësisht 3 cm dhe 4 cm. Gjeni perimetrin e drejtkëndëshit.

1 pikë

- A) 7
 B) 14
 C) 28
 D) 36

11. Jepet funksioni $y = x^2 - 4x + 1$. Gjeni vlerën x për të cilin ai ka minimum.

1 pikë

- A) 0
 B) 1
 C) 2
 D) 3

12. Derivati i funksionit $y = x^3 - 1$ në pikën $x = -1$ është:

1 pikë

- A) -1
 B) 1
 C) 2
 D) 3

13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3}{4x^3 + 1}$.

1 pikë

- A) 2
 B) 4
 C) 8
 D) 12

Pyetjet 14 – 25 janë me zgjidhje dhe arsytim.

14. Zgjidhni ekuacionin $8^{x-2} = 4^{x-1}$.

2 pikë

$$\begin{aligned} (2^3)^{x-2} &= (2^2)^{x-1} \\ 2^{3x-6} &= 2^{2x-2} \\ 3x-6 &= 2x-2 \\ \underline{x=4} \end{aligned}$$

15. Është dhënë funksioni $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

a) Studoni monotoninë e funksionit.

3 pikë

$$\begin{aligned} y' &= -3x^2 + 6x \\ -3x^2 + 6x &= 0 \\ 3x(-x+2) &= 0 \\ \underline{x=0, x=2} \end{aligned}$$

x	-∞	0	2	∞
y'	-	+	-	-
y	↘	↗	↘	↘

Ne $] -\infty, 0[$ dhe $] 2, \infty[$ fu zbrukes
Ne $] 0, 2[$ fu rritet

b) Vërtetoni se ekuacioni $-x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ ka të paktën një rrënjë reale në $[0; 2]$.

2 pikë

$$\begin{aligned} f(0) &= -1 < 0 \\ f(2) &= -8 + 12 - 1 = 3 > 0 \end{aligned}$$

Meqë funksioni është i vazhdueshëm dhe në skajet e ndryshës $] 0, 2[$ mëson vlera me shenjë të kundërt, egziston të paktën një pikë $c \in] 0, 2[$ që $f(c) = 0$

16. Gjeni bashkësinë e përcaktimit të funksionit $y = \sqrt{4-x^2} + \ln(1-x)$.

3 pikë

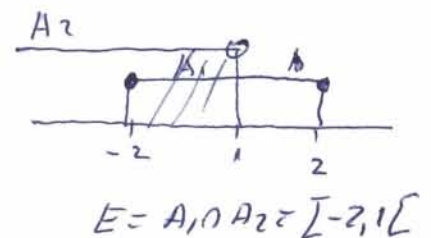
$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4-x^2 &\geq 0 \\ 4-x^2 &= 0 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

x	-∞	-2	2	∞
4-x^2	-	+	-	-

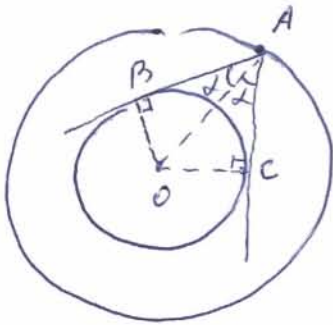
$$A_1 =] -2, 2[$$

$$\begin{aligned} 1-x &> 0 \\ x &< 1 \\ A_2 &=] -\infty, 1[\end{aligned}$$



17. Jepen rrethët me ekuacione $x^2 + y^2 = 4$ dhe $x^2 + y^2 = 8$. Nga një pikë e rrethit të madh ndërtojmë tangjentet ndaj rrethit të vogël. Gjeni këndin që ato formojnë.

3 pikë



Te gjejmë masën e \widehat{BAC}

$$\triangle AOB = \triangle AOC$$

$$AO \text{ e përballet} \Rightarrow \widehat{BAO} = \widehat{CAO}$$

$$AB = AC$$

$$\triangle AOB$$

$$OB = 2$$

$$OA = 2\sqrt{2}$$

$$\sin \widehat{OAB} = \frac{OB}{OA} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\widehat{OAB} = 45^\circ$$

18. Jepet $f(x) = 2x + 17$ dhe $f(t) = 7$. Gjeni t.

$$\widehat{A} = 2\widehat{OAB} = 90^\circ //$$

2 pikë

$$f(t) = 2t + 17$$

$$7 = 2t + 17$$

$$2t = -10$$

$$|t = -5|$$

19. Jepet funksioni $y = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & \text{për } x \neq 0 \\ 2a & \text{për } x = 0 \end{cases}$

Gjeni a që funksioni të jetë kudo i vazhdueshëm.

3 pikë

Për $x \neq 0$ f.k. është i vazhdueshëm si funksion elementar
 në bashkësinë e tij të përcaktimit
 Për të qenë i vazhdueshëm në \mathbb{R} , duhet që $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

$$1) f(0) = 2a$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\sin 2x}{2x} = 2$$

$$3) 2a = 2$$

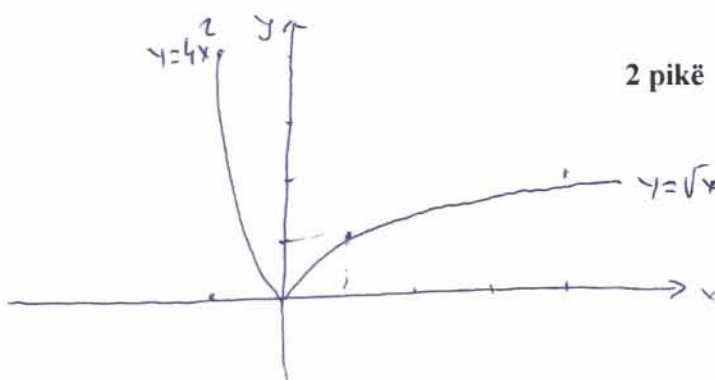
$$|a = 1|$$

20. Jepet funksioni $y = \begin{cases} 4x^2 & \text{për } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{për } x > 0 \end{cases}$

a) Skiconi grafikun e funksionit

x	-2	-1	0
$y=4x^2$	16	4	0

x	0 ⁺	1	4
$y=\sqrt{x}$	0	1	2



2 pikë

b) Gjeni syprinën e figurës që kufizohet nga dy grafikët dhe drejtëza $y = 1$.

1 pikë

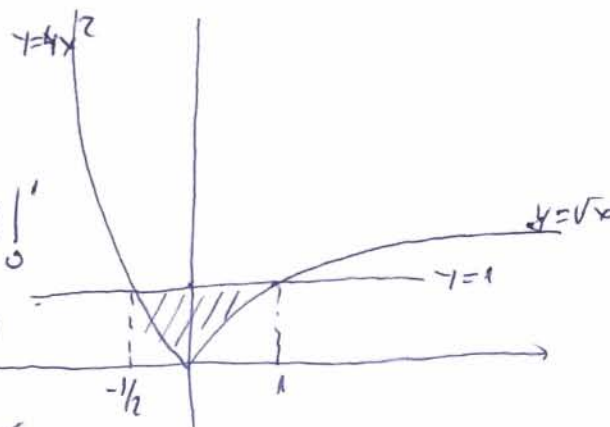
$$\begin{cases} y=4x^2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow 4x^2=1 \\ x = \pm 1/2$$

$$\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x}=1 \\ x=1$$

merret $x = -1/2$

$$S = \int_{-1/2}^0 (1-4x^2) dx + \int_0^1 (1-\sqrt{x}) dx = \left(x - \frac{4x^3}{3} \right) \Big|_{-1/2}^0 + \left(x - \frac{2}{3}x^{3/2} \right) \Big|_0^1$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} \right) + \left(1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + 1 - \frac{2}{3} = \frac{3-1+6-4}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ nj. katrorë}$$



21. Jepet funksioni $y = x^3 - 6x^2 + 4$.

a) Studioni përkulshmërinë e grafikut të funksionit.

2 pikë

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 - 12x \\ y'' &= 6x - 12 \\ 6x - 12 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y''	-	+	-

Ne $]-\infty, 2[$ fu i' myset
Ne $]2, +\infty[$ fu i' lufet

b) Gjeni ekuacionin e tangjentës të hequr në pikën me abshisë $x = 1$ ndaj grafikut të funksionit.

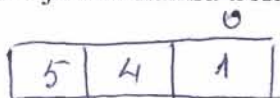
2 pikë

$$\begin{aligned} \text{en } p: y - f(1) &= f'(1)(x-1) \\ f(1) &= -1 \\ f'(1) &= 3 \cdot 1^2 - 12 = -9 \end{aligned}$$

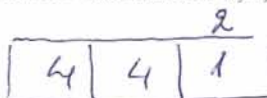
$$\begin{aligned} \text{en } p: y + 1 &= -9(x-1) \\ y + 1 &= -9x + 9 \\ 9x + y - 8 &= 0 \end{aligned}$$

22. Gjeni sa numra treshifrorë çift formohen me shifrat 0;1;2;4;7;9 pa përsëritje të shifrave.

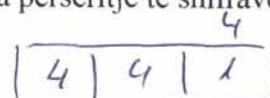
2 pikë



20 nr. çift mbretorje
me 0



16 nr. çift
mbretorje te 2



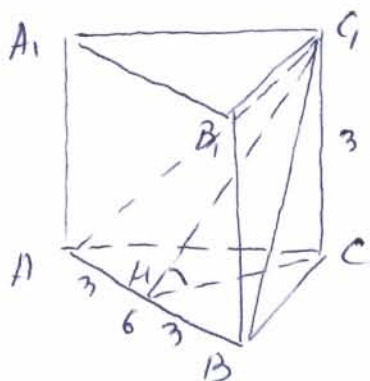
16 nr. çift
mbretorje te 4

Gjithësej $20 + 16 + 16 = 52$ nr. treshifrorë
çift ja përmasë

23. Jepet prizmi i rregullt trekëndor $ABCA_1B_1C_1$ me brinjën e bazës 6cm dhe brinjë anësore 3cm.

a) Gjeni syprinën e prerjes C_1AB .

2 pikë



$$\Delta ACC_1 = \Delta BCC_1 \Rightarrow AC_1 = BC_1$$

ΔC_1AB dy brinjë të barabarta

Lartësia C_1H bie te mesimi e AB

$$CC_1 \perp \text{planin } ABC \xrightarrow{\text{Teoremi 13.1}} CH \perp (AB)$$

$$C_1H \perp (CAB)$$

CH - lartësia e ΔABC

$$CH = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \Delta C_1CH \\ C_1H^2 - CC_1^2 + CH^2 &= 3^2 - 3\sqrt{3}^2 \\ &= 36 \Rightarrow C_1H = 6 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot CH}{2} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18 \text{ cm}^2$$

b) Gjeni këndin që formon prerja C_1AB me bazën.

2 pikë

\hat{C}_1HC është këndi i prerjes me drejtë

$$\sin \hat{C}_1HC = \frac{CC_1}{C_1H} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{C}_1HC = 30^\circ$$

24. Jepet elipsi me ekuacion $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$ dhe drejtëza $2x - 3y + 25 = 0$.

Gjeni ekuacionin e tangjentes ndaj elipsit paralele me drejtëzën e dhënë.

3 pikë

Meqe $t_1 \parallel d_1 \therefore$ ekuacioni i tangjentes në
pikë të drejtës $2x - 3y + c = 0$

$$\text{Kushti: } A^2 a^2 + B^2 b^2 = c^2$$

$$4 \cdot 18 + 9 \cdot 8 = 72 + 72 = 144 = c^2$$

$$|c| = \pm 12$$

$$\text{ekuacioni: } |2x - 3y \pm 12 = 0|$$

25. Në një kuti ndodhen pesë sfera të bardha dhe katër sfera të kuqe. Nxjerrim rastësisht dy prej tyre. Gjeni sa është probabiliteti që sferat të jenë të së njëjtës ngjyrë.

3 pikë

Shprehja me A ngjarja: "dy sfera janë të
njëjtës ngjyre"

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{\text{nr. i rastëve të favorshëm}}{\text{nr. i rastëve të mundshëm}}$$

$$n(E) = C_9^2 = \frac{9!}{2!7!} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$$

$$n(A) = C_5^2 + C_4^2 = \frac{5!}{2!3!} + \frac{4!}{2!2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} + \frac{4 \cdot 3}{2} = 10 + 6 = 16$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$